Name	Vorname	Matrikelnummer

☐ Mathematik

☐ Wirtschaftsmathematik

☐ Lehramt (Bachelor oder Master)

☐ Sonstiges: ____________

☐ Lehramt (Alt)

Klausur zur Veranstaltung Affine Lie-Algebren (WS 18/19)

Als *Konzeptpapier* sind die am Ende angefügten und vor Beginn der Aufgabenbearbeitung herauszulösenden Seiten zu verwenden.
In die Bewertung werden nur die Ausführungen auf den dafür vorgesehenen nummerierten Heftseiten und auf dem von der Klausuraufsicht ausgegebenen Zusatzpapier einbezogen.

Klausurergebnis	
☐ bestanden	☐ nicht bestanden
Prüfer	Prüfer

Hinweise

(a) Seitenzahl: 10 Seiten.

(b) Dauer:

- 90 Minuten (Bearbeitungszeit).

(c) Hilfsmittel: Keine.

(d) Vor Beginn der Klausur sind auf diesem Blatt oben Name, Matrikelnummer und Studiengang einzutragen. Die Klausur muss auf der letzten Seite unterschrieben werden!

(e) Die Klausur besteht aus einem Teil. Dieser besteht aus mehreren Aufgaben. Alle Aufgaben sind zu bearbeiten. Bei den Aufgaben 2, 3 und 4 sind alle Aussagen zu begründen.

(f) Es gibt 100 Punkte bei der korrekten Bearbeitung aller Aufgaben.

(g) Die Lösungen sind mit Füllhalter oder Kugelschreiber, NICHT mit Bleistift, auf dem zugeteilten Papier einzutragen.

(h) Auf Verlangen wird von der Klausuraufsicht weiteres Papier zugeteilt. Dieses ist mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu beschriften.

Interne Prüfvermerke					
Aufgabe	1	2	3	4	Gesamt
Erreichte Punkte					

Aufgabe 1. (35 Punkte) Bei den folgenden Teilaufgaben ist jeweils **genau eine** Antwort richtig; diese ist anzukreuzen. Beweise oder Begründungen sind nicht erforderlich.
Für jede richtige Antwort erhalten Sie **5 Punkte**, falsch beantwortete und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden nicht gewertet.

(a) Welcher der folgenden Untervektorräume von $M_n(\mathbb{C})$ (versehen mit der üblichen Lie-Klammer $[A, B] = AB - BA$) ist eine Lie-Unteralgebra?

- ☐ die symmetrischen Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$;
- ☒ die Matrizen mit Spur 0 in $M_n(\mathbb{C})$;
- ☐ die hermiteschen Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$;

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Dann ist $\exp A := \mathbb{1} + A + \frac{1}{2}A^2 + \ldots \in M_2(\mathbb{C})$ die Matrix:

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

(c) Welche der folgenden verallgemeinerten Cartan-Matrizen ist vom endlichen Typ?

☒ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; ☐ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Ein 2-Kozykel ϕ auf $\mathfrak{g}$ mit Werten in $\mathbb{C}$ ist eine bilineare und schiefsymmetrische Abbildung $\phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, für die zusätzlich gilt:

- ☒ $\phi(\ell_1, [\ell_2, \ell_3]) + \phi(\ell_3, [\ell_1, \ell_2]) + \phi(\ell_2, [\ell_3, \ell_1]) = 0$;
- ☐ $\phi(\ell_1, [\ell_2, \ell_3]) - \phi(\ell_3, [\ell_1, \ell_2]) - \phi(\ell_2, [\ell_3, \ell_1]) = 0$;
- ☐ $\phi(\ell_2, [\ell_2, \ell_3]) + \phi(\ell_3, [\ell_3, \ell_2]) + \phi(\ell_1, [\ell_3, \ell_1]) = 0$?

(e) Die Virasoro-Algebra $\mathbb{V}$ hat als Basis die Elemente $\{L_m \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \{c\}$, wobei c ein zentrales Element ist. Für die L_m ist die Lie-Klammer definiert durch

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{1}{12}(m^3 - m)c$$

Welche Aussage ist wahr: Die Virasoro-Algebra ist eine zentrale Erweiterung

- ☒ der Witt-Algebra;
- ☐ der Heisenberg-Algebra;
- ☐ des Ringes der Laurent-Polynome $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

(f) Sei $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}e_i$ der unendlich-dimensionale Vektorraum mit Basis $\{e_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Welches der folgenden unendlichen Dachprodukte ist ein Element im Fock-Raum $\Lambda^\infty(V)$:

- ☐ $e_1 \wedge e_{-1} \wedge e_2 \wedge e_{-2} \wedge e_3 \wedge e_{-3} \wedge e_4 \wedge e_{-4} \wedge e_5 \wedge e_{-5} \wedge e_6 \wedge e_{-6} \wedge e_7 \wedge e_{-7} \ldots$;
- ☐ $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \wedge \ldots$;
- ☒ $e_1 \wedge e_2 \wedge e_{-1} \wedge e_{-2} \wedge e_{-3} \wedge e_{-4} \wedge e_{-5} \wedge e_{-6} \wedge \ldots$?

(g) Welche der folgenden Aussagen ist wahr: Die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$ ist die Lie-Algebra aller komplexen $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Matrizen mit der Eigenschaft:

- ☒ nur endlich viele Einträge sind ungleich 0;
- ☐ unendlich viele Einträge außerhalb der Diagonalen sind ungleich 0;
- ☐ nur endlich viele Einträge außerhalb der Diagonalen sind gleich 1, und nur endlich viele Einträge auf der Diagonalen sind verschieden von 0.

Aufgabe 2. (**25 Punkte**) $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ **und die Heisenberg-Algebra:**
Sei $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ die affine Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ mit der Lie-Klammer

$$[xt^k + \lambda_1 c + \mu_1 d, yt^j + \lambda_2 c + \mu_2 d] = [x,y]t^{k+j} + \mu_1 j y t^j - \mu_2 k x t^k + k\delta_{k,-j}\mathrm{Spur}\,(x \cdot y)c.$$

Die Heisenberg-Algebra $\mathcal{H}$ ist die Lie-Algebra mit Vektorraumbasis $\{a_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{K\}$, wobei K ein zentrales Element ist und ansonsten die Klammerregel $[a_m, a_n] = m\delta_{m,-n}K$ gilt.

i) Sei $h_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: der Untervektorraum

$$H := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}h_0 t^j \oplus \mathbb{C}c \subset \widehat{\mathfrak{sl}_2}$$

ist eine Lie-Unteralgebra.

ii) Zeigen Sie: die Abbildung $H \to \mathcal{H}$, definiert durch $t^j h_0 \mapsto a_j$ und $c \mapsto \frac{1}{2}K$, definiert einen Lie-Algebrenisomorphismus zwischen H und $\mathcal{H}$.

Beweis: Zu *i)*: c ist ein zentrales Element in $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, also gilt $[h,c] = 0$ für alle $h \in H$. Weiter gilt gemäß der obigen Klammerregel:

$$[h_0 t^k, h_0 t^j] = [h_0, h_0]t^{j+k} + k\delta_{k,-j}\mathrm{Spur}\,(h_0 \cdot h_0)c = 2k\delta_{k,-j}c \in H. \tag{1}$$

Nach Konstruktion ist H ein Untervektorraum von $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$. Da die Klammer auf $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ bilinear ist, folgt aus der Rechnung in (1): $[h,h'] \in H$ für alle $h, h' \in H$. Somit ist H eine Lie-Unteralgebra von $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$.
Zu *ii)*: Die in *ii)* definierte Abbildung $\phi : H \to \mathcal{H}$ schickt eine Basis von H auf eine Basis von $\mathcal{H}$, es ist also ein Vektorraumisomorphismus. Es bleibt zu zeigen, dass es ein Lie-Algebrahomomorphismus ist.
Das zentrale Element c wird auf das zentrale Element $\frac{1}{2}K$ geschickt, also

$$\phi([h,c]) = \phi(0) = 0 = [\phi(h), \frac{1}{2}K] = [\phi(h), \phi(c)] \;\forall h \in H.$$

Für die Klammer der anderen Basiselemente gilt nach (1):

$$\phi([h_0 t^k, h_0 t^j]) = \phi(2k\delta_{k,-j}c) = k\delta_{k,-j}K = [a_k, a_j] = [\phi(h_0 t^k), \phi(h_0 t^j)].$$

Die Bilinearität der Klammer impliziert daher: ϕ ist ein Lie-Algebraisomorphismus.

Aufgabe 3. (20 Punkte) Orthogonale Lie-Algebra:
Sei $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ der Unterraum der schiefsymmetrischen Matrizen, d.h.

$$\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tA = -A\}.$$

i) Beweisen Sie: $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, d.h. $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ist ein Unterraum, und mit $A, B \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ ist auch $[A,B] = AB - BA \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$.

ii) Sei $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) := \{A \in M_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \mid {}^tA = -A\}$. Zeigen Sie: $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ ist eine Lie-Unteralgebra von $M_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$, und

$$\kappa : \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \times \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \to \mathbb{C}, \quad (A,B) \mapsto \operatorname{Res}\left(\operatorname{Spur}(\frac{\partial A}{\partial t}B)\right)$$

ist ein 2-Kozykel, d.h., κ ist bilinear, schiefsymmetrisch, und genügt der Jacobi-Identität.

Beweis: Zu *i)*: $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ ist nach Konstruktion (definiert durch lineare Gleichungen) ein Untervektorraum von $M_n(\mathbb{C})$. Die Bedingung ${}^tA = -A$ impliziert die Diagonaleinträge von A sind alle gleich 0, insbesondere gilt Spur $A = 0$. Somit ist $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ ein Unterraum von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Seien $A, B \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$. Dann gilt

$${}^t[A,B] = {}^t(AB) - {}^t(BA) = {}^tB{}^tA - {}^tB{}^tA = (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB = -[A,B].$$

Aus $A, B \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ folgt $[A,B] \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$, und somit: $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.
Zu *ii)*: Wie in *i)*, $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ ist nach Konstruktion ein Untervektorraum von $M_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$, die Schiefsymmetrie der Matrizen impliziert wie oben $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ ist ein Untervektorraum von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$. Seien $A, B \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$. Dann gilt

$${}^t[A,B] = {}^t(AB) - {}^t(BA) = {}^tB{}^tA - {}^tB{}^tA = BA - AB = -[A,B],$$

somit ist mit $A, B \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ auch $[A,B] \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$. Es folgt: $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$. In der Vorlesung wurde gezeigt:

$$\kappa : \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \to \mathbb{C}, \quad (A,B) \mapsto \operatorname{Res}\left(\operatorname{Spur}(\frac{\partial A}{\partial t}B)\right)$$

ist ein 2-Kozykel, d.h., κ ist bilinear, schiefsymmetrisch, und genügt der Jacobi-Identität. Die Einschränkung der Abbildung auf $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \times \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ genügt daher auch diesen Bedingungen.

Aufgabe 4. **(20 Punkte) Cartan-Unteralgebra:**
Sei $\mathfrak{g}$ die affine Kac-Moody Algebra $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$, siehe auch Aufgabe 2 für die Notation. Sei

$$\mathfrak{h} := \mathbb{C}h_0 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$$

Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathfrak{h}$ ist eine Cartan-Unteralgebra im üblichen Sinne, also $\mathfrak{h}$ ist eine Lie-Unteralgebra, nilpotent und selbstnormalisierend. Zur Erinnerung: nilpotent bedeutet es gibt ein ℓ mit

$$\underbrace{[\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, [\cdots, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cdots]]]}_{\ell} = 0,$$

und selbstnormalisierend bedeutet $[g, h] \in \mathfrak{h}$ für alle $h \in \mathfrak{h}$ impliziert $g \in \mathfrak{h}$.

Beweis: Nach Definition ist $\mathfrak{h}$ ein Untervektorraum von $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$. Aus der Definition der Klammer (siehe Aufgabe 2) folgt sofort:

$$[\nu_1 h_0 + \lambda_1 c + \mu_1 d, \nu_2 h_0 + \lambda_2 c + \mu_2 d] = \nu_1\nu_2[h_0, h_0] + \mu_1 0 h_0 t^0 - \mu_2 0 h_0 t^0 + 0\delta_{0,-0}\mathrm{Spur}\,(h_0 \cdot h_0)c = 0.$$

Damit ist $\mathfrak{h}$ eine kommutative Lie-Unteralgbra, insbesondere also nilpotent. Es bleibt zu zeigen: $\mathfrak{h}$ ist selbstnormalisierend. Sein nun $g \in \widehat{\mathfrak{sl}_2}$ so, dass $[g, h] \in \mathfrak{h}$ für alle $h \in \mathfrak{h}$. Das Element g hat eine Zerlegung

$$g = \lambda c + \mu d + \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j t^j \text{ mit } g_j \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}).$$

Es folgt (siehe Klammerregel in Aufgabe 2):

$$[g, d] = -\sum j g t^j.$$

Da $[g, d] \in \mathfrak{h}$ nach Annahme, muss notwendigerweise gelten: $g_j = 0$ für alle $j \neq 0$. Sei nun

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir bereits annehmen können $g_j = 0$ für alle $j \neq 0$, haben wir eine Zerlegung

$$g = \lambda c + \mu d + \nu h_0 + \alpha e + \beta f.$$

Dann gilt $[g, h_0] = 2\alpha e - 2\beta f$. Da $[g, h_0] \in \mathfrak{h}$ nach Annahme, folgt notwendigerweise $\alpha = \beta = 0$. Aus $[g, h] \in \mathfrak{h}$ für alle $h \in \mathfrak{h}$ folgt somit notwendigerweise $g \in \mathfrak{h}$.