Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel

Wintersemester 2018/19
Blatt 1

Übungen zu Affine Lie-Algebren

Aufgabe 1. Sei $V = \mathbb{C}[t, t^{-1}]^2$ versehen mit der Basis $\mathbb{B} = \{t^j e_i \mid j \in \mathbb{Z}, i = 1, 2\}$ betrachtet als $\mathbb{C}$-Vektorraum, wobei e_i den i-ten Einheitsvektor des $\mathbb{C}^2$ bezeichnet.

(i) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} t^{-2} & t^3 \\ t + t^2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$$

Die Matrix A definiert durch Linksmultiplikation ein Element von $\mathrm{End}(V)$, welches wir ebenfalls als A bezeichnen . Geben Sie die Darstellungsmatrix von A bezüglich der Basis $\mathbb{B}$ an. Wählen Sie hierfür die folgende Reihenfolge der Elemente von $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B} = \{\ldots, t^{-3}e_1, t^{-3}e_2, t^{-2}e_1, t^{-2}e_2, t^{-1}e_1, t^{-1}e_2, e_1, e_2, te_1, te_2, t^2e_1, t^2e_2, t^3e_1, t^3e_2, \ldots\}$$

(ii) Sei $\rho : \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) \to \mathrm{End}(V)$, die Abbildung, die einer Matrix die Abbildung definiert durch Linksmultiplikation zuweist, d.h. $\rho(A)(v) = A \cdot v$, also ist ρ die natürliche Darstellung von $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$. Zeigen Sie, dass die Abbildung ρ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 2. Sei $W = \langle L_n = t^{n+1}\frac{d}{dt} \mid n \in \mathbb{Z}\rangle_{\mathbb{C}}$ die Witt Algebra.

(i) Zeigen Sie, dass $\omega : W \to W; L_n \mapsto -L_{-n}$ zu einer antilinearen Lie-Algebren Involution erweitert, d.h. $\omega^2 = \mathrm{id}_W$, $\omega([x, y]) = [\omega(x), \omega(y)]$, $\omega(x + y) = \omega(x) + \omega(y)$ und $\omega(a \cdot x) = \bar{a} \cdot \omega(x)$ für $a \in \mathbb{C}, x, y \in W$ und $\bar{a}$ das Komplexkonjugierte von a.
Hinweis: Antilinearität und Wohldefiniertheit sind nur kurz zu begründen.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\langle L_n, L_{-n}, L_0\rangle \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

Abgabe am 15. Oktober in der Vorlesung. Besprechung am 16. bzw. 17. Oktober.