Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel

Wintersemester 2018/19
Blatt 1

Übungen zu Affine Lie-Algebren

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ einfach ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$-Darstellung auf $\mathbb{C}^n$ geben durch

$$\rho(A)(v) = A \cdot v$$

einfach ist.

(iii) Wir definieren die adjungierte Darstellung $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})); A \mapsto \mathrm{ad}_A$ durch

$$\mathrm{ad}_A(B) := [A, B]$$

Zeigen Sie, dass ad eine einfache Darstellung ist.

(iv) Sei $\mathfrak{h} := \{A \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ ist diagonal}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{h}$ eine Unterliealgebra ist, und dass eine Basis $\mathbb{B}$ von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ existiert, unter der alle ad_h diagonal sind, für $h \in \mathfrak{h}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Abbildung β Eigenschaft (c) erfüllt, und dass die auf $Z \oplus L$ definierte Lie-Klammer die Jacobi-Identität erfüllt. (Siehe Vorlesung)

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum. Wir nennen $f \in \mathrm{End}(V)$ <u>lokal nilpotent</u>, falls

$$\forall v \in V \; \exists n \in \mathbb{N} : f^n(v) = 0$$

Zeigen Sie, dass für solches f die formale Reihe

$$\exp(f) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^n$$

ein wohldefiniertes Element von $\mathrm{End}(V)$ ist.