

## Übungen zu Affine Lie-Algebren

---

**Aufgabe 1.** Wir definieren  $\kappa$  als die Form

$$\begin{aligned}\kappa : \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (X, Y) &\mapsto 2n \cdot \operatorname{tr}(XY).\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- (i) Die Form  $\kappa$  ist nicht degeneriert.
- (ii) Die Einschränkung der Form  $\kappa$  auf die Cartanalgebra  $H$  gegeben durch die Diagonalmatrizen ist nicht degeneriert.
- (iii) Wir bezeichnen mit  $\kappa^*$  die zu  $\kappa$  duale Form auf  $H^*$ . Berechnen Sie die Matrix

$$\left( \frac{2 \cdot \kappa^*(\alpha_i, \alpha_j)}{\kappa^*(\alpha_i, \alpha_i)} \right)_{1 \leq i, j \leq n-1}.$$

Hierbei bezeichnet  $\alpha_i$  die Abbildung definiert durch

$$\begin{aligned}\alpha_i : H &\rightarrow \mathbb{C} \\ h &\mapsto h_i - h_{i+1}\end{aligned}$$

mit  $h_i$  der  $i$ -te Diagonaleintrag von  $h$ .