Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel, Christian Steinert

Wintersemester 2017/18
Blatt 1

Übungen zu Schleifengruppen

Aufgabe 1. Sei $f : S^1 \to GL_n(\mathbb{C})$ eine Schleife. Angenommen es existiert eine Abbildung $F : \mathbb{C}^* \to GL_n(\mathbb{C}), z \mapsto (F_{i,j}(z))_{i,j}$, für die $F_{i,j} \in C^\infty(\mathbb{C}^*)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und $F|_{S^1} = f$ gilt. Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage. F ist mit diesen Eigenschaften eindeutig.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass der Kommutator

$$[\cdot,\cdot] : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \quad (A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA,$$

die Jacobi-Identität erfüllt, das heißt es gilt

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

für alle $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$. Folgern Sie insbesondere, dass $M_n(\mathbb{C})$ eine komplexe und $\mathfrak{u}_n(\mathbb{C})$ eine reelle Lie-Algebra ist.

Aufgabe 3. Sei $\exp : M_2(\mathbb{C}) \to GL_2(\mathbb{C})$ die Exponentialabbildung definiert durch

$$\exp(A) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\exp : \mathfrak{u}_2(\mathbb{C}) \to U_2(\mathbb{C})$ surjektiv ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\exp : M_2(\mathbb{R}) \to GL_2(\mathbb{R})$ nicht surjektiv ist.

(iii) Ist eine dieser beiden Abbildungen injektiv?

Aufgabe 4. Von welcher Form sind die algebraischen Schleifen in $L^{alg}GL_2(\mathbb{C})$, deren Bild ganz in den Diagonalmatrizen liegt? Von welcher Form sind die algebraischen Schleifen in $L^{alg}GL_2(\mathbb{C})$, deren Bild ganz in den oberen bzw. unteren Dreiecksmatrizen liegt?

Aufgabe 5. Bestimmen Sie $L^{alg}GL_1(\mathbb{C})$. Liegt insbesondere $f : S^1 \mapsto \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$, in $L^{alg}GL_1(\mathbb{C})$?

Präsenzaufgabe. Lösen Sie Aufgabe 4 und Aufgabe 5 für die jeweiligen unitären Gruppen.

Abgabe am 23. Oktober in der Vorlesung.