Prof. Dr. Peter Littelmann
Valentin Rappel, Christian Steinert

Wintersemester 2017/18
Blatt 2

Übungen zu Schleifengruppen

Aufgabe 1. Sei G eine reelle Mannigfaltigkeit und gleichzeitig eine Gruppe, so dass die Gruppenverknüpfung $\mu : G \times G \to G, (g,h) \mapsto gh$, differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass dann bereits die Inversenabbildung $i : G \to G, g \mapsto g^{-1}$, differenzierbar ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $GL_n(\mathbb{C})$ realisiert werden kann als abgeschlossene, reelle Untermannigfaltigkeit eines $\mathbb{C}^N \simeq \mathbb{R}^{2N}$ versehen mit der üblichen differenzierbaren Struktur.

Aufgabe 3. Sei G eine Lie-Gruppe und bezeichne mit G^0 die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements in G. Zeigen Sie, dass G^0 ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 4. Wir betrachten den Polynomring in einer Variablen $\mathbb{R}[\varepsilon]$ und definieren den *Ring der dualen Zahlen* R als den Quotienten $R := \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, wobei (ε^2) das von ε^2 in $\mathbb{R}[\varepsilon]$ erzeugte Ideal bezeichne. Sei $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$ ein Polynom und sei 0 ein regulärer Wert von f, das heißt Df_p ist surjektiv für alle $p \in \mathbb{R}^N$ mit $f(p) = 0$. Dann ist $M := \{p \in \mathbb{R}^N \mid f(p) = 0\}$ eine reelle Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

Sei $p \in M$. Definiere $V_p := \{v \in \mathbb{R}^N \mid f(p + \varepsilon v) = 0 \text{ in } R\}$, wobei wir f in natürlicher Weise als eine Abbildung $(\mathbb{R}[\varepsilon])^N \to \mathbb{R}[\varepsilon]$ auffassen. Zeigen Sie, dass $V_p = T_pM$ gilt.

Aufgabe 5. Sei $G = U_n(\mathbb{C})$.

(i) Zeigen Sie, dass G eine reelle Lie-Gruppe ist.

(ii) Bestimmen Sie den Tangentialraum an $\mathbb{1}$ und berechnen Sie die (reelle) Dimension von G.

(iii) Ist G kompakt?

(iv) Ist G zusammenhängend?

(v) Ist G eine komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^{n\times n}$ versehen mit der üblichen holomorphen Struktur?

Optional noch ein paar „einfache“ Überlegungen ohne Prüfungsrelevanz.

(vii) Ist G einfach zusammenhängend?

(viii) Ist G eine einfache Lie-Gruppe?

(ix) Ist G als Gruppe einfach?

Präsenzaufgabe. Lösen Sie Aufgabe 5 für ihre allerliebste Lie-Gruppe, zum Beispiel S^1, $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{R})$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$, $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ ...

Abgabe am 06. November in der Vorlesung.