Name ____________________ Vorname ____________________ Matrikelnummer | | | | | | | |

☐ Mathematik BA ☐ WiMathematik BA ☐ Sonstiges: ____________

☐ Mathematik MA ☐ WiMathematik MA

☐ Lehramt BA ☐ Lehramt MA ☐ Lehramt (Alt)

Klausur zur Veranstaltung Schleifengruppen (WS 17/18)

Als *Konzeptpapier* sind die am Ende angefügten und vor Beginn der Aufgabenbearbeitung herauszulösenden Seiten zu verwenden.
In die Bewertung werden nur die Ausführungen auf den dafür vorgesehenen numerierten Heftseiten und auf dem von der Klausuraufsicht ausgegebenen Zusatzpapier einbezogen.

Klausurergebnis	
☐ bestanden	☐ nicht bestanden
Prüfer	Prüfer

Hinweise

(a) Seitenzahl: 11 Seiten.

(b) Dauer:

- 90 Minuten (Bearbeitungszeit).

(c) Hilfsmittel: Keine.

(d) Vor Beginn der Klausur sind auf diesem Blatt oben Name, Matrikelnummer und Studiengang einzutragen. Die Klausur muss auf der letzten Seite unterschrieben werden!

(e) Die Klausur besteht aus einem Teil. Dieser besteht aus mehreren Aufgaben. Alle Aufgaben sind zu bearbeiten. Bei den Aufgaben 2, 3, 4 und 5 sind alle Aussagen zu begründen.

(f) Es gibt 105 Punkte bei der korrekten Bearbeitung aller Aufgaben. Ab 80 Punkten wird die Klausur mit der Note 1,0 bewertet.

(g) Die Lösungen sind mit Füllhalter oder Kugelschreiber, NICHT mit Bleistift, auf dem zugeteilten Papier einzutragen.

(h) Auf Verlangen wird von der Klausuraufsicht weiteres Papier zugeteilt. Dieses ist mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer zu beschriften.

Interne Prüfvermerke						
Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
Erreichte Punkte						

Aufgabe 1. (28 Punkte) Bei den folgenden Teilaufgaben ist jeweils **genau eine** Antwort richtig; diese ist anzukreuzen. Beweise oder Begründungen sind nicht erforderlich.
Für jede richtige Antwort erhalten Sie **4 Punkte**, falsch beantwortete und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden nicht gewertet.

(a) Welcher der folgenden Vektorräume ist der Tangentialraum an der $\mathbb{1} \in U_n(\mathbb{C})$?

- ☐ $M_n(\mathbb{C})$;
- ☐ Matrizen mit Spur 0 in $M_n(\mathbb{C})$;
- ☐ hermitesche Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$;
- ☒ schief-hermitesche Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$.

(b) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine unipotente Matrix, $A \neq \mathbb{1}$. Dann ist $\log A \in M_n(\mathbb{C})$ eine

☐ unipotente Matrix; ☐ Diagonalmatrix; ☒ nilpotente Matrix?

(c) Sei $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ die Abbildung $a \mapsto \begin{pmatrix} a^3 \\ a^2 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ ϕ ist ein Isomorphismus auf das Bild;
- ☒ ϕ ist ein bijektiver Morphismus auf das Bild;
- ☐ ϕ ist surjektiv.

(d) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$. Dann gibt es Matrizen $g_1, g_2 \in GL(\mathbb{C}[t])$ und ein $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^2$, so dass $A = g_1 t^{\underline{\lambda}} g_2$. Dabei gilt für $\underline{\lambda}$:

☒ $\underline{\lambda} = (-1, 1)$; ☐ $\underline{\lambda} = (-2, 1)$; ☐ $\underline{\lambda} = (0, 1)$?

(e) Welche der folgenden Aussagen ist wahr: Die Graßmann Varietät $G_{d,n} \subset \mathbb{P}(\Lambda^d V)$ ist

- ☐ eine affine Varietät;
- ☒ die Menge aller reinen Dachprodukte in $\mathbb{P}(\Lambda^d V)$;
- ☐ die Menge aller Polynome vom Grad d.

(f) Welches der folgenden unendlichen Dachprodukte ist ein semi-infinites Dachprodukt in $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}(\mathbb{C}[t, t^{-1}]^2)$:

- ☐ $e_1 \wedge te_1 \wedge t^2 e_1 \wedge t^3 e_1 \wedge t^4 e_1 \wedge \ldots$;
- ☒ $t^{-3} e_1 \wedge t^{-1} e_2 \wedge t^2 e_1 \wedge t^2 e_2 \wedge t^3 e_1 \wedge t^3 e_2 \wedge \ldots$;
- ☐ $te_1 \wedge te_2 \wedge t^3 e_1 \wedge t^3 e_2 \wedge t^5 e_1 \wedge t^5 e_2 \wedge t^7 e_1 \wedge t^7 e_2 \wedge \ldots$?

(g) Welche der folgenden Aussagen ist wahr: Die Gruppe $GL_\infty(\mathbb{C})$ ist die Gruppe aller invertierbaren komplexen $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Matrizen mit der Eigenschaft:

- ☒ nur endlich viele Einträge außerhalb der Diagonalen sind ungleich 0, und nur endlich viele Einträge auf der Diagonalen sind verschieden von 1;
- ☐ unendlich viele Einträge außerhalb der Diagonalen sind ungleich 0, und nur endlich viele Einträge auf der Diagonalen sind gleich 1;
- ☐ nur endlich viele Einträge außerhalb der Diagonalen sind gleich 1, und nur endlich viele Einträge auf der Diagonalen sind verschieden von 0 .

Aufgabe 2. (**16 Punkte**) **Die Exponentialabbildung:**

i) Sei $\exp : M_2(\mathbb{R}) \to GL_2(\mathbb{R})$ die Exponentialabbildung über den reellen Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine reelle Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ mit

$$\exp A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wenn es eine solche Matrix gibt, dann geben Sie bitte die Matrix an.

ii) Sei $\exp : M_2(\mathbb{C}) \to GL_2(\mathbb{C})$ die Exponentialabbildung über den komplexen Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine komplexe Matrix $A \in M_2(\mathbb{C})$ mit

$$\exp A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wenn es eine solche Matrix gibt, dann geben Sie bitte die Matrix an.

Lösung:

i) Angenommen es gibt eine solche Matrix A. Da $\det(\exp(A)) = \exp(\mathtt{Spur}(A))$ gilt, folgt $\exp(\mathtt{Spur}(A)) = -1$. Nun ist aber $\mathtt{Spur}(A)$ eine reelle Zahl und somit $\exp(\mathtt{Spur}(A)) > 0$, im Widerspruch zu $\exp(\mathtt{Spur}(A)) = -1$. Es kann also keine solche Matrix geben.

ii) Die komplexe Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ is surjektiv, es gibt also (nicht eindeutig bestimmte) komplexe Zahlen $\ln 2, \ln(-\frac{1}{2})$ mit der Eigenschaft $2 = \exp(\ln 2)$ und $-\frac{1}{2} = \exp(\ln(-\frac{1}{2}))$. Doe folgende Matrix A hat daher die gewünschte Eigenschaft:

$$A = \begin{pmatrix} \ln 2 & 0 \\ 0 & \ln(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. (20 Punkte) Affine Varietäten und Zariski Topologie:

i) Beweisen oder widerlegen Sie: Eine echte Teilmenge $X \subsetneq \mathbb{C}$, $X \neq \emptyset$, ist abgeschlossen (in der Zariski-Topologie) dann und nur dann, wenn sie endlich ist.

ii) Man nennt eine affine Varietät Z *irreduzibel*, wenn

(I) aus $Z = X \cup Y$ mit $X, Y \subset Z$ abgeschlossen in Z folgt: $X = Z$ oder $Y = Z$.

Hier eine andere Formulierung: Man nennt eine affine Varietät Z *irreduzibel*, falls

(II) $Z = \overline{U}$ für jede nicht leere offene Teilmenge U von Z.

Zeigen Sie: Die zwei Definitionen (I) und (II) sind äquivalent zueinander.

iii) Sei Z eine irreduzible affine Varietät und seien $f, g \in \mathbb{C}[Z]$. Sei $U \subset Z$ eine offene und nicht leere Teilmenge. Beweisen oder widerlegen Sie: $f|_U = g|_U \Longrightarrow f = g$.

iv) Beweisen oder widerlegen Sie: Die folgende affine Varietät Z ist irreduzibel

$$Z = \{v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid xy = 0\}.$$

Lösung:

i) Da $X \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und eine echte Teilmenge ist, gibt es endlich viele Polynome $f_1(x)$, …, $f_r(x)$, verschieden vom Nullpolynom, mit X ist die gemeinsame Nullstellenmenge der $f_1(x), \ldots, f_r(x)$. Da die Nullstellenmenge eines Polynoms, das verschieden ist vom Nullpolynom, immer endlich ist, folgt X ist eine endliche Menge. Umgekehrt, eine endliche Menge $\{z_1, \ldots, z_r\} \subset \mathbb{C}$ ist die Nullstellenmenge des Polynoms $p(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_r)$, also abgechlossen in der Zariski-Topologie.

ii) (I) $\Rightarrow$ (II) Sei Z irreduzibel und sei $U \subset Z$ offen und nicht leer. Sei $X = \overline{U}$ der Zariski-Abschluss von U und sei $Y = Z - U$ das Komplement von U in Z. Dann gilt $Z = X \cup Y$, und, da $Y = Z - U \neq Z$, folgt aus Z irreduzibel: $X = \overline{U} = Z$.

(II) $\Rightarrow$ (I) Sei $Z = X \cup Y$ mit $X, Y \subset Z$ abgeschlossen. Wenn $X = Z$, ist nichts zu zeigen. Sei nun $X \subsetneq Z$, somit ist $U = Z - X$ eine offene und nicht leere Teilmenge. Da $Z = X \cup Y$ folgt $U \subset Y$, und damit auch $\overline{U} \subseteq Y$. Aus (II) folgt: $Y = Z$.

iii) Die Nullstellenmenge $X = \mathcal{V}(f - g)$ ist abgeschlossen in Z und enthält die offene und nicht-leere Teilmenge U. Da Z irreduzibel ist folgt $\overline{U} = Z$, und damit $Z = \overline{U} \subseteq X \subseteq Z$. Es folgt: $X = \mathcal{V}(f - g) = Z$ und damit $f = g$.

iv) Offensichtlich sind

$$X = \{v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid x = 0\}, \quad Y = \{v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid y = 0\},$$

abgeschlossene Teilmengen von Z, es gilt $X \neq Z$ und $Y \neq Z$, und $Z = X \cup Y$. Also ist Z nicht irreduzibel.

Aufgabe 4. **(20 Punkte) Schleifengruppen und die $GL_n(\mathbb{C}[t])\underline{t}^{\underline{\lambda}}GL_n(\mathbb{C}[t])$-Zerlegung:**
Sei $\gamma(t) \in GL_3(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) = L^{alg}GL_3(\mathbb{C})$ die folgende algebraische Schleife:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^4 & 0 & t^2 \\ t^3 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^7 \end{pmatrix}.$$

i) Sei $I_1(\gamma)$ das Ideal in $\mathbb{C}[t]$ erzeugt von allen 1×1-Minoren von γ. Bestimmen Sie den normierten Erzeuger von $I_1(\gamma)$.

ii) Sei $I_2(\gamma)$ das Ideal in $\mathbb{C}[t]$ erzeugt von allen 2×2-Minoren von γ. Bestimmen Sie den normierten Erzeuger von $I_2(\gamma)$.

iii) Berechnen Sie die Determinante $\det \gamma$.

iv) Benutzen Sie *i), ii)* und *iii)* um das $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^3$ zu bestimmen, für das es polynomiale Schleifen $\gamma_1, \gamma_2 \in GL_n(\mathbb{C}[t])$ gibt mit

$$\gamma = \gamma_1 \underline{t}^{\underline{\lambda}} \gamma_2.$$

Lösung:

i) $I_1(\gamma) = \langle t^2, t^3, t^4, t^7 \rangle = \langle t^2 \rangle$

ii) $I_2(\gamma) = \langle t^6, t^5, t^4, t^{11}, t^{10}, t^9 \rangle = \langle t^4 \rangle$

iii) $\det \gamma = t^{13}$.

iv) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 9$.

Aufgabe 5. (21 Punkte) Zerlegung in unitäre und polynomiale Schleifen:

i) Sei $\gamma(t) \in GL_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) = L^{alg}GL_2(\mathbb{C})$ die Diagonalmatrix:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

mit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2$. Beweisen Sie: $\gamma \in \Omega^{alg}U_2(\mathbb{C})$.

ii) Sei $p(t) = a_r t^r + a_{r+1} t^{r+1} + \ldots + a_k t^k$ ein Laurent-Polynom mit $\lambda_1 \leq r < r+1 < \ldots < k$ und $a_r, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$. Sei $\eta(t)$ die obere Dreiecksmatrix:

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & p(t) \\ 0 & t^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie: Es gibt ein Polynom $q(t) \in \mathbb{C}[t]$, so dass

$$\eta(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 & q(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma(t).$$

iii) Berechnen Sie die Zerlegung von $\eta(t)$ als ein Produkt einer unitären Schleife mit Basispunkt $\mathbb{1}$ und einer polynomialen Schleife.

Lösung:

i) Man hat $\gamma(t) \in L^{alg}GL_2(\mathbb{C})$. Da $\gamma(z) \in U_2(\mathbb{C})$ für alle $z \in S^1$ folgt $\gamma(t) \in LU_2(\mathbb{C})$. Da $L^{alg}U_2(\mathbb{C}) = LU_2(\mathbb{C}) \cap L^{alg}GL_2(\mathbb{C})$ und $\gamma(1) = \mathbb{1}$ folgt $\gamma(t) \in \Omega^{alg}U_2(\mathbb{C})$.

ii) Setze $q(t) = -a_r t^{r-\lambda_1} - a_{r+1} t^{r+1-\lambda_1} - \ldots - a_k t^{k-\lambda_1} \in \mathbb{C}[t]$, dann gilt

$$\begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & a_r t^r + \ldots + a_k t^k \\ 0 & t^{\lambda_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a_r t^{r-\lambda_1} - \ldots - a_k t^{k-\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

iii) Damit ist

$$\begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & a_r t^r + \ldots + a_k t^k \\ 0 & t^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t^{\lambda_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_r t^{r-\lambda_1} + \ldots + a_k t^{k-\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die gewünschte Zerlegung.