1 Organisatorisches

- Anmeldung muss noch heute passieren! (math@vrappel.de)
- Präferenzliste für Vorträge in Mail (3 oder mehr Themen)

  Ablauf:
- Jede Woche Vortrag von Studierenden
- Länge des Vortrags eine Stunde
- Entweder Tafel oder per Beamer mit LaTeX-Package "Beamer"
- Wenigstens eine Vorbesprechung mit Valentin Rappel spätestens eine Woche vor Vortrag
- Teil der eigenständigen Seminarvorbereitung: Erarbeiten der Kernpunkte aus der Quelle und Entscheidung über den Detailgrad für jede Aussage

2 Vortragsthemen

1. (Grundlagen) [S, 1.1-1.3] Definition: Lineare Darstellungen von Gruppen. Beispiele/Definition: reguläre Darstellung, triviale Darstellung, Permutationsdarstellungen. Definition: Grad einer Darstellung, Unterdarstellung, Einschränkung einer Darstellung, orthogonale Komplemente von Darstellungen
2. (Irreduzible Darstellungen) [S, 1.4,2.2,3.1] Definition: Irreduzible Darstellungen. Beweis: Zerlegbarkeit von Darstellungen in irreduzible Darstellungen,Schurs Lemma. Irreduzible Darstellung abelscher Gruppen, Folgerungen für Gruppen mit abelschen Untergruppen.
3. (Konstruktionen neuer Darstellungen aus alten) [S, 1.5,1.6] Definition:Tensorprodukte, symmetrische und äußere Produkte von Vektorräumen und die zugehörigen Darstellung. Bestimmung des Grades der vorgenannten
4. (Charaktere) [S, 2.1] Definition und Eigenschaften: Charakter einer linearen Darstellung, duale Darstellung (auch kontragrediente Darstellung) zu gegebenen Darstellung (Beispiele [S, 2.3,2.4]), Klassenfunktion
5. (Skalarprodukt für Darstellungen) [S, 2.3] Definition: Skalarprodukt für Darstellungen, Irreduzibilitätskriterium mittels Skalarprodukt. Beispiel [S, 2.5]
6. (Anzahl irreduzibler Darstellungen) [S, 2.4,2.5,p. 35]Beweis: Jede irreduzible Darstellung ist enthalten in der regulären Darstellung. Bestimmung: Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe. Definition: Charaktertafel? Beispiele: $|G| = 3$ und endliche zyklische Gruppe?

7. (Induzierte Darstellungen) [FH, 3.3], [S, 3.3] Definintion Induzierte Darstellung: Gegeben lineare Darstellung einer Untergruppe, Konstruktion einer Darstellung der gesamten Gruppe. Beweis: Frobenius Reziprozitätsformel.

8. (Gruppenalgebren) [FH, 3.4], [S, Anfang von 6.1] Definition Gruppenalgebra kG zu kommutativen Ring k und diskreten Gruppe G. Beispiele $k\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$. Erneute Definition von induzierten Darstellung, mittels Gruppenalgebren. Beweisen Sie die Zerlegung von $\mathbb{C}G$ nach [FH, 3.29]

9. (Beispiele) [S, Chapter 5] Anwendung auf Darstellungstheorie einiger Beispielklassen endlicher Gruppen: zyklische Gruppen, Diedergruppen, S_4 etc.

10.,11. (Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen, I, II) [FH, Lecture 4] Kombinatorische Konzepte in der Darstellungstheorie der S_n. Detailierte und mit expliziten Beispielen und einen Überblick über die allgemeine Theorie. Diese beiden Vorträge sollten zwei Studierende zusammen übernehmen und sich absprechen

12. (Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$) [FH, 5.2] Gehen Sie zuerst auf die Gruppe ein und leiten Sie einige Eigenschaften her (wichtige Untergruppen, Konjugationsklassen,...). Dann Darstellungstheorie dieser Gruppe.

13. (Darstellungsringe: Artin) [FH, p. 22], [S, 9.1–9.4] Definition: Darstellungsring $\mathrm{R}(G)$ für G endliche Gruppe. . Artins Theorem: Beziehung zwischen Darstellungsringen von Untergruppen und dem Darstellungsring der Gruppe. Satz von Brauer (optional) [S, Chapter 10]: Wie vorher aber p-elementare Untergruppen (p Primzahl).

14. (Darstellungsringe über anderen Körpern) [S, 14.1,12.1] Bisher: Darstellungstheorie über $\mathbb{C}$. Jetzt: Darstellungsthoerie über einem beliebigen Körper K. Definition: Darstellungsring $R_K(G)$ für endliche Gruppe G. Darstellungsringe im Fall $\mathrm{char}(K) = 0$.

3 Vortragsthemen Langfassung

1. (Grundlagen) [S, 1.1-1.3] Was sind lineare Darstellungen von Gruppen? Definieren Sie den Begriff und stellen Sie Beispiele vor (reguläre Darstellung, triviale Darstellung, Permutationsdarstellungen). Was ist der Grad einer Darstellung? Definieren Sie die Einschränkung einer Darstellung auf eine Untergruppe und den Begriff der Unterdarstellung. Was sind orthogonale Komplemente von Darstellungen?

2. (Irreduzible Darstellungen) [S, 1.4,2.2,3.1] Was sind irreduzible Darstellungen? Zeigen Sie die Zerlegbarkeit von Darstellungen in irreduzible Darstellungen und beweisen Sie Schurs Lemma. Wie sehen irreduzible Darstellung abelscher Gruppen aus? Was kann man sagen, wenn die Gruppe eine abelsche Untergruppe hat?

3. (Konstruktionen neuer Darstellungen aus alten) [S, 1.5,1.6] Wiederholen Sie aus der Linearen Algebra, was Tensorprodukte, symmetrische und äußere Produkte von Vektorr¨aumen sind. Definieren Sie dann die entsprechenden Konstruktionen für lineare Darstellungen und bestimmen Sie jeweils den Grad.

4. (Charaktere) [S, 2.1] Was ist der Charakter einer linearen Darstellung? Leiten Sie elementare Eigenschaften her und behandeln Sie die duale Darstellung (auch kontragrediente Darstellung genannt) zu einer gegebenen Darstellung (Beispiele [S, 2.3,2.4]). Was sind Klassenfunktionen?

5. (Skalarprodukt für Darstellungen) [S, 2.3] Definieren Sie das Skalarprodukt für Darstellungen und benutzen Sie es, um ein Irreduzibilitätskriterium herzuleiten. Behandeln Sie das Beispiel [S, 2.5]

6. (Anzahl irreduzibler Darstellungen) [S, 2.4,2.5,p. 35] Zeigen Sie zunächst, dass jede irreduzible Darstellung in der regulären Darstellung enthalten ist. Erklären Sie dann, wie man die Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe bestimmen kann. Was ist eine Charaktertafel? Wie sieht sie aus für $|G| = 3$ und für eine endliche zyklische Gruppe?

7. (Induzierte Darstellungen) [FH, 3.3], [S, 3.3] Wenn Sie eine lineare Darstellung einer Untergruppe gegeben haben, können Sie diese zu einer Darstellung der gesamten Gruppe hochinduzieren. Definieren Sie induzierte Darstellungen und beweisen Sie die Frobenius Reziprozitätsformel.

8. (Gruppenalgebren) [FH, 3.4], [S, Anfang von 6.1] Definieren Sie die Gruppenalgebra kG zu einem kommutativen Ring k und einer diskreten Gruppe G und behandeln Sie die Beispiele $k\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ Benutzen Sie Gruppenalgebren, um eine alternative Beschreibung induzierter Darstellungen zu geben. Beweisen Sie die Zerlegung von $\mathbb{C}G$ nach [FH, 3.29]

9. (Beispiele) [S, Chapter 5] Wenden Sie die Techniken an, um die Darstellungstheorie einiger Beispielklassen endlicher Gruppen zu beschreiben: zyklische Gruppen, Diedergruppen, etc.

10.,11. (Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen, I, II) [FH, Lecture 4] Um Darstellungen der symmetrischen Gruppen zu verstehen, benötigen wir einige kombinatorische Konzepte. Stellen Sie uns [FH, 4.1] im Detail und mit expliziten Beispielen vor und geben Sie uns einen Überblick über die allgemeine Theorie. Diese beiden Vorträge sollten zwei Studierende zusammen übernehmen und sich absprechen, damit wir ein kohärentes Gesamtbild bekommen.

12. (Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$) [FH, 5.2] Betrachten Sie den endlichen Körper $\mathbb{F}_q$. Gehen Sie zuerst auf die Gruppe ein und leiten Sie einige Eigenschaften her (wichtige Untergruppen, Konjugationsklassen,...). Stellen Sie uns dann die Darstellungstheorie dieser wichtigen Gruppe vor.

13. (Darstellungsringe: Artin) [FH, p. 22], [S, 9.1–9.4] Für eine endliche Gruppe G kann man den Darstellungsring $\mathrm{R}(G)$ betrachten. Dieser ist von den irreduziblen Darstellungen erzeugt. Artins Theorem beschreibt, inwieweit Darstellungsringe von Untergruppen den gesamten Darstellungsring abdecken. Falls Zeit bleibt, können Sie über den Satz von Brauer [S, Chapter 10] berichten. Dieser untersucht speziell die Frage, wie viel man abdeckt, wenn man sich auf sogenannte p-elementare Untergruppen einschränkt (p Primzahl).

14. (Darstellungsringe über anderen Körpern) [S, 14.1,12.1] Bisher haben wir Darstellungstheorie über $\mathbb{C}$ betrieben. Häufig braucht man aber Darstellungen über anderen Körpern. Sie sollen zunächst den allgemeinen Darstellungsring $R_K(G)$ definieren für einen beliebigen Körper K und eine endliche Gruppe G, und uns dann erklären, was man über Darstellungsringe sagen kann, falls K ein Körper der Charakteristik 0 ist.